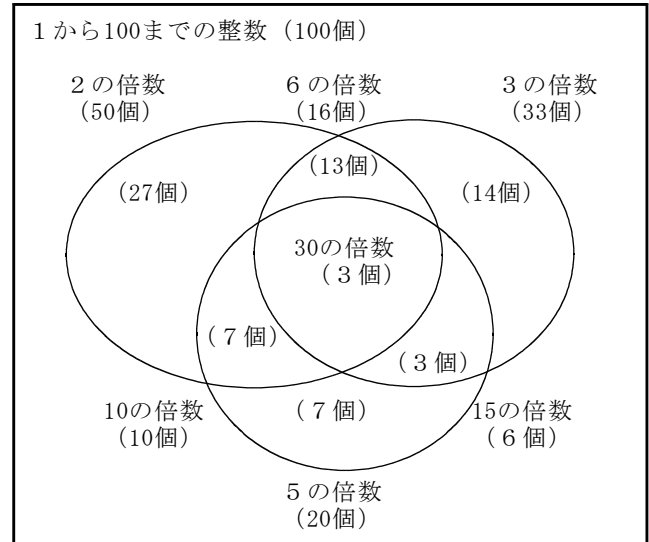


令和8年度 わか杉チャレンジフェスティバル 解説(第1回)
 <中学生の部>

I

- (1) 1 から100までの整数のうち、
 2 の倍数は50個、
 3 の倍数は33個、
 5 の倍数は20個、
 6 の倍数は16個、
 10の倍数は10個、
 15の倍数は6個、
 30の倍数は3個ある。

この個数の関係を表すと右図のようになる。
 取り除かれるカードは74枚なので、残りのカードは**26枚**。



- (2)
 ① 右図に示すように、連続する5つの整数の和は
 (真ん中の数) $\times$ 5 と予想される。
 このことから、(真ん中の数) が24の倍数であれば、
 (真ん中の数) $\times$ 5 が120の倍数になる。
 24の倍数は4個あるので**4通り**。

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$\begin{array}{c} \text{---} 3 \times 2 \text{---} \\ \text{---} 3 \times 2 \text{---} \end{array}$$

これにより3が5つ分となる。
 $2 + 3 + 4 + 5 + 6$
 $3 + 4 + 5 + 6 + 7$
 も同様に、連続する5つの整数の和は、(真ん中の数) $\times$ 5 となる。

- ② カードの枚数が2枚のとき、Aは $1 \times (3 \text{ 以上の奇数}) \cdots 3 \text{ 以上の奇数}$ になる。
 カードの枚数が3枚のとき、Aは (真ん中の数) $\times$ 3
 カードの枚数が4枚のとき、Aは $2 \times (5 \text{ 以上の奇数}) \cdots 10 \text{ 以上の偶数}$ になる。
 カードの枚数が5枚のとき、Aは (真ん中の数) $\times$ 5
 枚数が2枚のとき奇数、4枚のとき偶数であるから、3通りの取り出し方をするには、3枚と5枚の他に、2枚あるいは4枚で取り出すことができればよい。
 そこで、3枚と5枚のときに注目して $3 \times 5 = 15$ の場合を考えると、15は、(4, 5, 6), (1, 2, 3, 4, 5) に加え、奇数であるから (7, 8) と2枚で取ることが可能である。4枚以上で和を15にすることは不可能であるから、**最も小さいAは15である**。

- ③ 【カードの枚数が奇数】の場合
 3つの連続する整数の和は、(真ん中の数) $\times$ 3
 5つの連続する整数の和は、(真ん中の数) $\times$ 5
 $\vdots$
 のようになる。
 このことから連続する整数の和は (真ん中の数) $\times$ (カードの枚数) となる。
 ここで、(カードの枚数) は2以上の奇数であるから、
 100を (整数) $\times$ (奇数) の形に表すと、 20×5 、 4×25 の2通り。
 20×5 のとき、(真ん中の数) が20でカードは5枚 $\cdots 18, 19, 20, 21, 22$
 4×25 のとき、(真ん中の数) が4でカードは25枚 $\cdots$ 真ん中の数が4で連続する25枚を並べることが不可能。

- 【カードの枚数が偶数】の場合
 連続する整数の和は、(真ん中の2数の和) $\times$ (枚数の1/2) となる。
 ここで、(真ん中の2数の和) は3以上の奇数、枚数は偶数であるから、
 100を (奇数) $\times$ (偶数) の形に表すと、 25×4 、 5×20 の2通り。
 25×4 のとき、(真ん中の2数の和) が25でカードは8枚
 $\cdots 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$
 5×20 のとき、(真ん中の2数の和) が5でカードは40枚 $\cdots$ 真ん中の2数が5で連続する40枚を並べることが不可能。
 よって、取り出すカードの枚数が最も多くなる取り出し方は、
 (9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16) 。

Ⅱ この問題は、計算で解くことは困難である。場合に分けたり、整理して考えたり、逆向きに考えたり、筋道を立てて考察する。

(1)

- ① この勝負は、18個目の石を置いた方が勝つ。→ 次の人は19個目の石を置くことになる。

先手がどうしたら18個目の石を置くことができるかを考える。

- ・先手が17個目の石を置く → 後手は石を1個置くことで、18個目の石を置くことができる。
- ・先手が16個目の石を置く → 後手は石を2個置くことで、18個目の石を置くことができる。
- ・先手が15個目の石を置く → 後手は石を3個置くことで、18個目の石を置くことができる。
- ・先手が14個目の石を置く → 後手は石を4個置くことで、18個目の石を置くことができる。
- ・先手が13個目の石を置く → 後手は18個目の石を置くことができなくなり、逆に、先手が18個目の石を置くことができる。

よって、先手が13個目の石を置くとよい。今、石は9個並んでいるので、先手は○の石を4個置くとよい。

- ② 一回目に○の石を3個置くとよい。その後は、先手が2人の置いた石の数の和が5になるようにして8個目の石を置き、同様に13個目、18個目の石を置くとよい。

*①より、この勝負は18個目の石を置いた方が勝つ。18個目の石を置くためには、13個目の石を置くとよい。同様に考えると、13個目の石を置くためには、8個目の石を置くとよい。8個目の石を置くためには、3個目の石を置くとよい。

(最初に先手が石を3個置くと、後手が1～4個のいずれの個数の石を置いても、先手が2人の置いた石の数の和が5になるようにすれば、先手は8個目の石、13個目の石を置くことができる。例えば、後手が3個の石を置いた場合、先手は2個の石を置くと8個目の石を置くことができる。13個目の石についても同様。)

- ③ 例1：「石は1回に1～4個置くことができる。21個目の石を置いた方を負けとする。」

*「 a 個目を置いた方を負け」の a の値を変える。石を1回に1～4個置くことができる場合、「 a 個目を置いた方を負け」のときは $(a - 1)$ 個を基準に、 $(4 + 1)$ ずつ減らした数になるように石を置いていくとよい。後手が「必勝パターン」に持ち込むことができるのは、後手が2人の置いた石の数の和を5の倍数にできるときである。よって、 $a = 16$, $a = 21$, $a = 26 \cdots$ のように、 $(a - 1)$ が5の倍数になるように a の値を設定する。

例2：「石は1回に1～3個置くことができる。17個目の石を置いた方を負けとする。」

*1回に置くことができる石の個数を変え、それに応じて、「 a 個目を置いた方を負け」の a の値を変える。1回に置くことができる個数が1～4個のときは、基準の数から $(4 + 1)$ ずつ減らした数になるように考えた。同様に、1回に置くことができる個数が1～3個のときは、基準の数から $(3 + 1)$ ずつ減らした数になるように石を置いていくとよい。後手が「必勝パターン」に持ち込むことができるのは、後手が2人の置いた石の数の和を4の倍数にできるときである。よって、 $a = 13$, $a = 17$, $a = 21, \cdots$ のように、 $(a - 1)$ が4の倍数になるように a の値を設定する。

*上の2つの例を一般化してもよい。「石は1回に1～ m 個置くことができる。 n 個目の石を並べた方を負けとする。ただし、 $(n - 1)$ は $(m + 1)$ の倍数とする。」

(2) 少し試行錯誤をして楽しみながら考えてほしい。

① ㊸または㊹に置くとよい。

先手が明らかに勝つ場合は、

- ・後手が●の石を㊸, ㊹, ㊺に置いた場合

先手が○の石を㊹に置くと、後手がどこに●の石を置いても、先手は○の石を㊸と㊺のいずれかに置けば勝つことができる。

＊このような状況はダブルリーチといって、「必勝パターン」といえる。

- ・後手が●の石を㊸に置いた場合、先手が○の石を㊸に置くとダブルリーチ。

- ・後手が●の石を㊸または㊹に置いた場合、先手がどこに置いてもダブルリーチにならず、引き分けにすることが可能になる。

図5

㊸	○	㊹
㊺	㊻	㊼
㊽	●	○

② 次のいずれかの原則に当てはめると、「必勝パターン」に持ち込むことができる。

原則1：相手が次に石を置くべきところを限定させる。

原則2：ダブルリーチの形にする。

(A) ㊸, ㊹, ㊺のいずれかに置くとよい。

- ・先手が○の石を㊸に置いた場合

→ 後手は●の石を必ず㊽に置く（原則1）

→ 先手が○の石を㊸に置いてダブルリーチ（原則2）

- ・先手が○の石を㊹に置いた場合

→ 後手は●の石を必ず㊸に置く（原則1）

→ 先手が○の石を㊹に置いてダブルリーチ（原則2）

- ・先手が○の石を㊺に置いた場合

→ 後手は●の石を必ず㊻に置く（原則1）

→ 先手が○の石を㊺に置いてダブルリーチ（原則2）

(B) ㊻に置いたとき。

- ・先手が○の石を㊻に置いた場合

→ 後手が●の石を㊽に置くと、

→ 先手は○の石を必ず㊸に置く（原則1）

→ ●の石を㊽に置いてダブルリーチ（原則2）

＊その他、先手が○の石を㊸, ㊹, ㊺に置いた場合は、引き分けとなる場合があることから「必勝パターン」にはならない。

図6

○	㊻	●
㊺	㊻	㊼
㊽	㊼	㊽