令和７年度　わか杉チャレンジフェスティバル　解説（第２回）

（中学生の部）

Ⅰ

(1) 大きい順に書くと次のようになる。

98765，98764，98763，98762，98761，98760，　　←上４桁が 9876 のとき
98756，98754，98753，98752，98751，98750，　　←上４桁が 9875 のとき
98746，98745，98743，98742，98741，98740，　　←上４桁が 9874 のとき
98736，**98735**　　←上４桁が 9873 のとき

小さい順に書くと次のようになる。

10234，10235，10236，10237，10238，10239，　　←上４桁が1023のとき
10243，10245，10246，10247，10248，10249，　　←上４桁が1024のとき
10253，10254，10256，10257，10258，10259，　　←上４桁が1025のとき
10263，**10264**　　←上４桁が1026のとき

(2) ① 順序だてて数字をつくり，吟味することで求められる。

＜２数の上２桁の差を考える＞

上２桁の差を最小の１にする（０にはできない）。

それは，80－79，70－69，……，20－19（2数の上2桁の差が１→実際の差は1000）。

＜下３桁 x，y ＞

残りの６数を用いて，1000＋ x － y を最小にする２数の下３桁 x，y を考える。

上２桁に応じて，次の７つの場合を検討する。（x を最小，y を最大にすればよいので）

上2桁が80－79の場合，1000＋123－654＝469
上2桁が70－69の場合，1000＋123－854＝269
上2桁が60－59の場合，1000＋123－874＝249
上2桁が50－49の場合，1000＋123－876＝247
上2桁が40－39の場合，1000＋125－876＝249
上2桁が30－29の場合，1000＋145－876＝269
上2桁が20－19の場合，1000＋345－876＝469

よって，最小値は　50123－49876＝**247**

② 上の位に大きい数字があれば積は大きくなるので，Ａ，Ｂの上の位から，万の位に（９，８），千の位に（７，６），百の位に（５，４），十の位に（３，２），一の位に（１，０）が入る。

○上の位の数が，$x > y$ のとき，下位の数 b，$b+1$をどのように決めるかの考察

$(10x+b)(10y+b+1)$ と $(10x+b+1)(10y+b)$ のどちらが大きいかを考える。

$(10x+b)(10y+b+1)-(10x+b+1)(10y+b)$　　ここで，$10x+b=\mathrm{X}$，10y＋＋$b=\mathrm{Y}$とする。

$=\mathrm{X}(\mathrm{Y}+1)-(\mathrm{X}+1)\mathrm{Y} = \mathrm{XY}+\mathrm{X}-\mathrm{XY}-\mathrm{Y} = \mathrm{X}-\mathrm{Y}$

$=10(x-y)>0$

このことから次のことが分かる。

・97×86 と 96×87 では，96×87 の方が大きい

　→Ａ，Ｂの上２桁は，それぞれ 96，87

・965×874 と 964×875 では，964×875 の方が大きい

　→Ａ，Ｂの上３桁は，それぞれ 964，875

・9643×8752 と 9642×8753 では，9642×8753 の方が大きい

　→Ａ，Ｂの上４桁は，それぞれ 9642，8753

・96421×87530 と 96420×87531 では，96420×87531 の方が大きい

よって，Ａ＝**96420**，Ｂ＝**87531**

(3)　１＋２＋３＋……＋９＝45であるから，「＋」を省略することにより上の位に上がる数の和が５，15，25，35となっている式ができていれば正解。（式の和の一の位が０になれば，10の倍数）

例：順序よく整理して考えていく必要がある。

　繰り上げされてできる数が何か所あるかで場合を分け，繰り上げる数の和が５，15，25，35となるように考える。ただし，順序よく整理して考えていく必要がある。

【繰り上げされてできる数が１箇所の場合】

○繰り上げる数の和が５（5，2＋3がある）

例えば，５を十の位に上げて，　$\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\boxed{4}+\boxed{5\ 6}+\boxed{7}+\boxed{8}+\boxed{9}$

また，２＋３＝５だから同様に，$\boxed{1}+\boxed{2\ 3\ 4}+\boxed{5}+\boxed{6}+\boxed{7}+\boxed{8}+\boxed{9}$

○繰り上げる数の和が15（1＋2＋3＋4＋5，4＋5＋6，7＋8がある）

１＋２＋３＋４＋５＝15 であるから，$\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}+\boxed{7}+\boxed{8}+\boxed{9}$

４＋５＋６＝15 であるから，$\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\boxed{4\ 5\ 6\ 7}+\boxed{8}+\boxed{9}$

７＋８＝15 であるから，$\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\boxed{4}+\boxed{5}+\boxed{6}+\boxed{7\ 8\ 9}$

○繰り上げる数の和が25（3＋4＋5＋6＋7がある）

３＋４＋５＋６＋７＝25 であるから，$\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8}+\boxed{9}$

○繰り上げる数の和が35（2＋3＋4＋5＋6＋7＋8，5＋6＋7＋8＋9がある）

２＋３＋４＋５＋６＋７＋８＝35であるから，　$\boxed{1}+\boxed{2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9}$

５＋６＋７＋８＋９＝35　であるが，$\boxed{9}$の次に数字がないので，この場合はできない。

【繰り上げされてできる数が２箇所の場合】

○繰り上げる数の和が５

１と４の合計が５であるから，$\boxed{1\ 2}+\boxed{3}+\boxed{4\ 5}+\boxed{6}+\boxed{7}+\boxed{8}+\boxed{9}$

○繰り上げる数の和が15

２と６＋７の合計が15であるから，　$\boxed{1}+\boxed{2\ 3}+\boxed{4}+\boxed{5}+\boxed{6\ 7\ 8}+\boxed{9}$

２＋３＋４と６の合計が15であるから，$\boxed{1}+\boxed{2\ 3\ 4\ 5}+\boxed{6\ 7}+\boxed{8}+\boxed{9}$

３＋４と８の合計が15であるから，　$\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3\ 4\ 5}+\boxed{6}+\boxed{7}+\boxed{8\ 9}$

○繰り上げる数の和が25

１＋２＋３＋４と７＋８の合計が25であるから，$\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ 5}+\boxed{6}+\boxed{7\ 8\ 9}$

１＋２と４＋５＋６＋７の合計が25であるから，$\boxed{1\ 2\ 3}+\boxed{4\ 5\ 6\ 7\ 8}+\boxed{9}$

４と６＋７＋８の合計が25であるから，　$\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\boxed{4\ 5}+\boxed{6\ 7\ 8\ 9}$

○繰り上げる数の和が35

少なくとも９を含む２数を除いた数で和が35にはならないので，この場合はできない。

【繰り上げされてできる数が３箇所の場合】

○繰り上げる数の和が15

１と６と８の合計が15であるから，　$\boxed{1\ 2}+\boxed{3}+\boxed{4}+\boxed{5}+\boxed{6\ 7}+\boxed{8\ 9}$

２と５と８の合計が15であるから，　$\boxed{1}+\boxed{2\ 3}+\boxed{4}+\boxed{5\ 6}+\boxed{7}+\boxed{8\ 9}$

３と５と７の合計が15であるから，　$\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3\ 4}+\boxed{5\ 6}+\boxed{7\ 8}+\boxed{9}$

１と３と５＋６の合計が15であるから，$\boxed{1\ 2}+\boxed{3\ 4}+\boxed{5\ 6\ 7}+\boxed{8}+\boxed{9}$

１と３＋４と７の合計が15であるから，$\boxed{1\ 2}+\boxed{3\ 4\ 5}+\boxed{6}+\boxed{7\ 8}+\boxed{9}$

１＋２と４と８の合計が15であるから，$\boxed{1\ 2\ 3}+\boxed{4\ 5}+\boxed{6}+\boxed{7}+\boxed{8\ 9}$

１＋２と５と７の合計が15であるから，$\boxed{1\ 2\ 3}+\boxed{4}+\boxed{5\ 6}+\boxed{7\ 8}+\boxed{9}$

○繰り上げる数の和が25

１と３と６＋７＋８の合計が25であるから，　$\boxed{1\ 2}+\boxed{3\ 4}+\boxed{5}+\boxed{6\ 7\ 8\ 9}$

１と４＋５と７＋８の合計が25であるから，　$\boxed{1\ 2}+\boxed{3}+\boxed{4\ 5\ 6}+\boxed{7\ 8\ 9}$

１＋２＋３と５＋６と８の合計が25であるから，$\boxed{1\ 2\ 3\ 4}+\boxed{5\ 6\ 7}+\boxed{8\ 9}$

２と４＋５＋６と８の合計が25であるから，　$\boxed{1}+\boxed{2\ 3}+\boxed{4\ 5\ 6\ 7}+\boxed{8\ 9}$

２＋３と５と７＋８の合計が25であるから，　$\boxed{1}+\boxed{2\ 3\ 4}+\boxed{5\ 6}+\boxed{7\ 8\ 9}$

Ⅱ

(1) ①　階段の上り方を和の形で表現する。

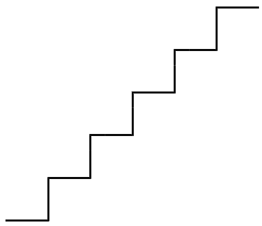
（すべて１段上りで上るとき）1＋1＋1＋1＋1

（２段上がりで１回）2＋1＋1＋1，1＋2＋1＋1，1＋1＋2＋1，
1＋1＋1＋2

（２段上がりで２回）2＋2＋1，2＋1＋2，1＋2＋2

の**８通り**の方法がある。

図１



②　最初，１段上るとき，あと11段上ることになる。

最初，２段上るとき，あと10段上ることになる。

このことから，　（12段の階段の上り方）＝（10段の階段の上り方）＋（11段の階段の上り方）

同様に考えると，（11段の階段の上り方）＝（９段の階段の上り方）＋（10段の階段の上り方）

（10段の階段の上り方）＝（８段の階段の上り方）＋（９段の階段の上り方）

・・・・・・・・・・・・・・

（３段の階段の上り方）＝（１段の階段の上り方）＋（２段の階段の上り方）

となる。したがって，１，２，３，･･･，12と順番に考えると次の表のようになる。

階段の段数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
階段の上り方	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	**233**

(2) n段の上がり方が何通りあるかをP(n)と表す。

すると，P(１)＝１　……（１）のみ

P(２)＝２　……（１，１），（２）

P(３)＝４　……（１，１，１），（１，２），（２，１），（３）

ここで，P(12)を考えるに当たっては，

・最初，１段上るとき，あと11段上ることになる。→ P(11)

最初，２段上るとき，あと10段上ることになる。→ P(10)

最初，３段上るとき，あと９段上ることになる。→ P(９)

このことから，　　$P(12)=P(11)+P(10)+P(9)$

同様に考えると，　$P(11)=P(10)+P(9)+P(8)$

$P(10)=P(9)+P(8)+P(7)$

・・・・・・

$P(4)=P(3)+P(2)+P(1)$

となる。したがって，１，２，３，･･･，12と順番に考えると次の表のようになる。

階段の段数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
階段の上り方	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	**927**

(3)　まず，はじめの５回までを考える。太郎さんは３勝２敗なので，花子さんは２勝３敗。

＜太郎さんについて：３勝２敗で，５回終了時は５段目＞

$2\times3-1\times2=4$にも関わらず５段目にいるということは，１回の負で下がらなかったことが１回あったということである。それは，１回目に太郎さんが負けた場合のみである。（１回目に勝つとあとの２敗では確実に階段を下りることになる。　・・・①

＜花子さんについて：２勝３敗で，５回終了時は２段目＞

花子さんは，１回目に勝つことになるので，２段目の位置から１勝３敗で２段目に移動することになる。それは，勝の後に（負負負勝）となった場合のみである。・・・②

①より，太郎さんは（負勝勝勝負），花子さんは（勝負負負勝）となったことが分かる。

次に，後半の７回を考える。　　……最終的に，太郎さん，花子さんが共に８段目

＜太郎さんについて：スタートが５段目でゲーム終了時は８段目＞

A：足踏みがない場合 …… $2x-y=3$，$x+y=7$。このような整数xはないので不可。

B：０段目で足踏みある場合 …… 太郎さんは６敗以上することになり，最終的に８段目は不可能。

C：10段目で足踏みがある場合 ……　６～９回目に４勝，10回目に勝，11～12回目に負

６～９回目に３勝１敗，10回目に勝，11～12回目に負

このことから，太郎さんが考えられるのは次の２通り。

C１：６～９回目に４勝，10回目に勝，11～12回目に負

C２：６～９回目に３勝１敗，10回目に勝，11～12回目に負

＜花子さんについて：スタートが２段目でゲーム終了時は５段目＞

上のC１，C２の場合について考える。

C１：（花子さんは，２段目スタートで６～９回目に４敗，10回目に負，11～12回目に勝）

このとき，最後は，４段目となり５段目ではない。

C２：（花子さんは，２段目スタートで６～９回目に１勝３敗，10回目に負，11～12回目に勝）

花子さんは９回目を終えたときに，２段目にいる必要があり，６～９回目が（負負負勝）と分かる。

以上より，太郎さんは（負勝勝勝負勝勝勝負勝負負）

花子さんは（勝負負負勝負負負勝負勝勝）

であったことが分かる。

よって，確実にいえるものは　**ア，ウ，オ**